

I-1 「学びをつなぐ《探究するコミュニティ》としての実践」

スパイラルな探究を通して、コミュニティの価値を見出す

—身近な事象を数学的に考察する中で、グラフや式の有用性を実感する(第2学年)—



「携帯電話の料金システム」を考える場面では、2年生初期の段階での探究を考慮し、1年生での「文字の式」における探究をもとに、コミュニティの質の高まりを目指した。その結果、式やグラフを用いた探究の場面が見られた。「修学旅行の移動のようす」を考える場面では、移動の状況をイメージしそれをグラフ化したり、グラフを式化したりする活動を取り入れた。具体的な場面を数学的にとらえ、問題づくりや仲間分けを通して、数学的コミュニケーションの機会が生まれ、式を用いた探究が見られるようになった。

1 学びの構想

従来の学習は、「連立方程式」→「一次関数」のように、代数分野の学習を終えてから関数分野の学習に入る。しかし、現実事象を考えた場合、2つの数量の間の関係を調べる過程で方程式を用いる必要性が生じると考えたほうが妥当であると考ええる。そこで、本単元では、「連立方程式」と「一次関数」の2つの単元を同時に学習するカリキュラムを設定した。「携帯電話の料金システム」「修学旅行の移動のようす」という2つの場面を設け、設定された場面から子どもの筋で課題や疑問を解決する過程で、一次の概念を形成する展開を考えた。

まず、準備段階として、「1日の学校生活について等式を作ろう」というテーマで、文字を用いて数量を等式に表す。ある文字に注目して、その数量を表す式に変形する。この段階では、2年生のクラス替えがあり、新しいクラスとなって、どのようにコミュニティを形成していくのかを教師が確認することをねらいとした。

次に第1次の場面では、携帯電話の料金システムを利用し、携帯ショップの店員になってお客さんに3つのプランの中でおすすめのプランを説明する場面を設ける。3つの料金プランにおいて、料金が変わる時間を求める際には、グラフや式などを駆使した探究が行われることをねらいとした。

第2次の場面では、まずグラフ電卓を用いて自らの動きをグラフ化した。その後、修学旅行の班別行動としてホテルから東京駅を通り、秋葉原まで歩いていく自分たちの動き、逆に秋葉原から東京駅まで歩いてくる芸能人の動きを表したグラフを提示し、

グラフからわかることを挙げて問題づくりを行った。この段階では、式の重要性を感じ取らせることをねらいとした。

2 学びのストーリー

(1) 身のまわりの事象に目を向け、数量を等式に表す。
(第1～3時)

① 1日の学校生活について、等式を作ろう
(第1～3時)

教師：今日はまず、1日の学校生活について等式を作ることから始めたいと思います。文字は3種類までとし、数字はいくつ使ってもよいものとします。

りお：先生、全校生徒は何人ですか？

ひな：約分して出したほうがいいですか？

文字を作るためにどうするか、質問しながら等式の作成を進め、1班では以下のような等式が出来上がった。

等式の例

$$A = y(354 + 30 - x)$$

給食の皿＝皿の数（全校生徒＋先生と事務職員の人数－欠席者数）

いくつかの班が出来上がった等式について発表し、それぞれどのような考えで等式を作ったのかを説明した。そこで、この等式をもとに「等式の変形」を次の課題とした。

教師：今、給食の皿についての等式 $A = y(354 + 30 - x)$ があります。この式から、この日の欠席数を知りたいと

思ったら、どのような式になるでしょう。
 こた：354+30は先に計算したほうがいいですか？
 すけ：答えは分数になりますか？

色々な質問が飛び交い、前後隣同士で確認しながら答えを出している。分数が出てきた時に、とまどいを見せた子どももいたように見える。全ての班の等式について、「等式の変形」を行い、「等式の変形」には「等式の性質」の考えがもとになっているということを確認した。

子どもたちは、身のまわりの数量に目を向け、1年生での学びを生かしながらコミュニティの形成をしているようだ。

(2) 携帯電話の料金システムを考える中で、グラフや式の有用性を実感する。 (第4～10時)

① 3つのプランの中で、お得な料金プランを考えよう。 (第4～5時)

教師：今や9割以上の人が携帯電話を持っている時代です。皆さんにも持っている人はいますね。それでは、その料金はどのくらいか考えたことはありますか。今日は先生が仮の料金プランを考えてきたので、まずはこちらを見て下さい。

教師が以下の3つのプランを提示する。

< Aプラン >

- ・基本使用料 (月額) 4200円
- ・1分ごとの通話料 30円

< Bプラン >

- ・基本使用料 (月額) 4500円
- ・無料通話 2000円
- ・1分ごとの通話料 50円

< Cプラン >

- ・基本使用料 (月額) 7500円

生徒：Aプラン高い！
 生徒：Cプランは絶対選ばないよ！
 まみ：Bじゃないかな。
 ひか：無料通話って何？
 教師：2000円分は無料ってことです。
 生徒：じゃあ2000円超えたら料金かかるってこと？
 教師：そうです。
 こた：じゃあだめだね。
 ゆみ：ってことは40分をこえたら1分50円かかるってことですか？
 教師：うーん。そういうことになるかな。
 生徒：なんでー。(ささやき)
 こた：無料通話って40分話さなくても2000円なの？
 教師：そうです。
 ゆう：2000円分の割引券があるのと同じですか？
 教師：そうとも言うね。
 こた：41分から1分50円かかるってことだよ！

子どもたちは、Bプランが安いと思っている。さらに、「無料通話」という言葉が気に入り、それを

追究したい様子である。

そこで、携帯電話の料金システム (1ヶ月の使用料 = 基本使用料 + 1分ごとの通話料 × 時間) を確認して班での活動に入る。

教師：では、一度班になって、どのプランがお得か考えてみよう。

だい：16分から変わるのかな。

もも：16分以下ってどういう計算で出したの？

(しん、りえも気になる様子)

だい：ちょっと待って。(計算に夢中になっている)

りえ：16分だとAのほうが高くなる。

だい：そう。さっきのは間違えたんだよ。結局、Aは10分以下、Bは10分以上100分以下、Cは100分以上かな。

しん：なんで100分以内なの？

だい：BとCの差額は3000円。Bで何分話せばCと同じ料金になるか考えればいいから。3000 ÷ 50 = 60分。けど無料通話があるから、2000 ÷ 50 = 40分話せる。だから60分 + 40分 = 100分話せば、BとCは同じ料金になる。

しん：え？

りえ：以下ってその数含むじゃないの？

だい：そうだよ。でも、以下、以上を区別する必要はないよ。10分のときにピッタリ同じになるんだから。

りえ：あー、なるほど。

たて：Cプランって電話できないんですか？

教師：できるよ。

だい：どれだけ電話しても7500円の定額ってことですよね？

教師：そうそう。

りえ：あー。なるほど。

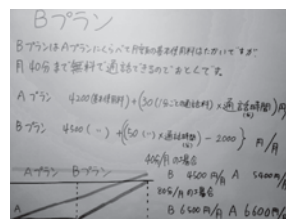
2班では、だいを中心に話し合いがなされ、3つのプランについて、料金が変わる時間を求めている。だいは具体的な数字を用いて計算し、基本料金の差額に注目している。

② 料金が変わる時間に注目して、料金プランについてお客さんに説明しよう。 (第6～7時)

どの班も一通りの話し合いが終わったところで、中間発表会の場を設ける。

< 7班の発表 >

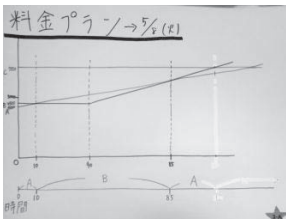
こた：僕らの班は、プランが向いてる人を表しました。10分話す人はAプラン、Bプランは0～100分で月額が高いけれど40分以上の人は安い。101分以上話す人はCプラン。



7班は、他にも料金システムをもとにして、言葉の式でかかる料金を表している。

< 5 班の発表 >

ゆう：このグラフは横が時間、縦がかかる料金です。料金は上にいくと上がっていきます。110分からはCが得で、Bとは差が開いています。



5 班はグラフを用いた説明を行った。

< 1 班の発表 >

おり：時間ごとのおすすめプランです。0～10分と85～110分はAプラン，10分～85分はBプラン，110分～はCプランです。

こた：なんで具体的な数字がわかるのですか？

おり：10分ごとにそれぞれの料金を求めた。それが無理なら5分ずつ。

ゆみ：数字を代入したってことです。

Aプラン	月 0分～10分
	85分～110分の通話
Bプラン	月 10分～85分の通話
Cプラン	月 110分～の通話



1 班は実際の時間をもとにかかる料金を計算していた。

そこで、一つ一つの計算を行うよりも、もっと簡単に料金が変わる時間を求める方法がないかを次時で考えることにした。

教師：今日は、3つの料金プランを比べて、料金が変わる時間をどのようにして求めればよいかを考えたいと思います。

だい：自分の答えは間違っていた。まずグラフをかこう。

りえ：数字は出るんですけど、どうやって出すかは分かりません。

教師：これ、何してるの？

だい：方程式解いている。

教師：どうやって式を作るといい？

りえ：通話時間が x で、 y は？

教師：この方程式は何を表す？

だい：料金が等しいことを表します。これが料金を表します。

りえ：料金を y とおくのか。

だいは、前時の3つの発表を受け、自分の答えの間違いに気づいている。さらに、グラフや式を使って、料金が変わる時間を求めている。それをもとに、りえはグラフの式を求めようと、 x 、 y がそれぞれ何を表すかを考えていた。

また、今日の授業の最後には以下のような質問もあった。

こた：先生、今何をやっているのですか？

教師：何をやっていると思う？

こた：証明か連立方程式。

教師：なんで？

こた：証明は自分でやってるし、連立方程式は次の単元だから。

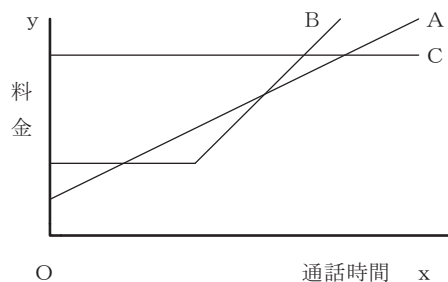
こたは、今の学習内容が気になっているので、携帯電話の料金には、どのような数学的意味があるのかを次時で確認することにした。

③料金プランの秘密を探ろう。 (第8～10時)

まず、料金プランについての式、グラフを求めることにした。グラフに関しては、料金プランをもとに重なるところを調べて、どこが多いかを考えながら作成した。式に関しては、料金システムをもとに、言葉の式を考えながら求めた。

以下は、今回の料金プランをもとに求められたグラフと式である。

< グラフ >



< 式 >

$$A: y = 4200 + 30x \quad (x \geq 0)$$

$$B: y = 4500 \quad (0 \leq x \leq 40)$$

$$y = 4500 + 50(x - 40) \quad (x \geq 40)$$

または

$$y = 4500 + 50x - 2000 \quad (x \geq 40)$$

$$C: y = 7500 \quad (x \geq 0)$$

さらに、一次関数の定義、一次関数と比例の関係、平行移動、連立方程式の定義、連立方程式の解の意味、2直線の交点の座標、代入法などを確認した。また、料金プランのグラフから式を求める考えをもとに、①傾きと切片②傾きと1点の座標③2点の座標から式を求める方法を確認した。

料金プランの背景に存在する数学的意味を確認し終えるころには、こたは納得した表情で「先生、よく分かりました。」と言っていた。

これらの考えの習得の場として、連立方程式の解き方、グラフから式を求めること、2直線の交点の座標を求めることを行い、携帯電話の料金プランの単元を終えた。

(3) 修学旅行の移動のようすを数学で考える。

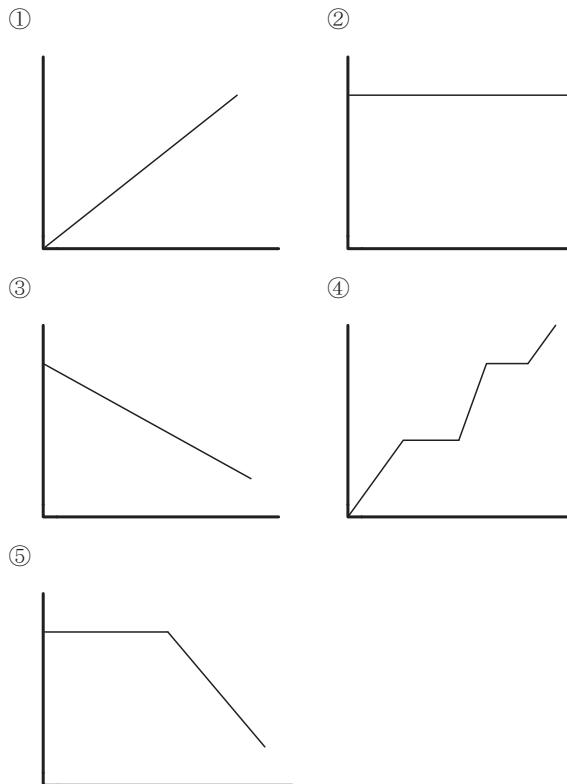
(第11～19時)

第1次の料金プランを考える中で、一次関数や連立方程式の学習内容について触れることができた。しかし、連立方程式の加減法、一次関数の傾き・変化の割合や変域などはまだ扱っておらず、一次の概念が十分に理解されているとは思われない。そこで、第2次の修学旅行の移動のようすを考える中で、そのような概念の獲得を目指すことにした。

①自分の動きをグラフに表そう。(第11時)

まずグラフ電卓を用いて、自分の動きをグラフに表すことを行う。グラフ電卓は1年生の時にも使用したものだが、復習の意味を込めてもう一度改めて考えることにした。

教師：次のグラフを表すには、どのような動きをすればよいだろう。



1年生の時に学んだことを生かし、センサーから近づく動き、遠ざかる動き、止まっている動きを自分の動きと照らし合わせて確認した。

そして、これらの動きを言葉で表すとどうなるかを考えることにした。

教師：グラフの動きを言葉にするとどうなるだろう。
 おり：一定のスピードで歩き、センサーから遠ざかっている。①
 ます：一定のスピードで止まっている。②
 こた：止まっているから速さは0だね。
 なか：一定のスピードで近づいている。③

たろ：センサーから一定の速度で遠ざかって、止まってを繰り返す。④

おぐ：最初に止まって、センサーから近づく。⑤

りえ：でも、自分の動きを言葉にするのって意外に難しいですね。

教師：そうですね。

一つ一つの動きを丁寧に言葉で確認しながら5つの動きをおさえたが、りえのように、動きを言葉にすることに戸惑いを見せるものもいた。



②動きのグラフからわかることを挙げよう。

(第12～13時)

グラフ電卓で自分の動きを確認し終えて、いよいよ修学旅行の移動のようすを考えることにする。

教師：今日から始まる新しい課題は「修学旅行の移動の様子を数学で考えよう!」です。

これから学ぶことを話し、状況1と状況2を、実際の地図を用いて説明する。

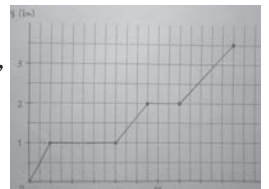


<地図>

状況1

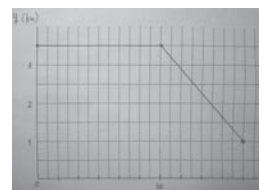
修学旅行の班別行動として、ホテルから秋葉原駅まで向かいます。

ホテルから東京駅まで歩いて行き、東京駅の地下街のお店で買い物をしました。そして、東京駅を出て、道の途中の屋台でもんじゃ焼きを試食してから、秋葉原駅へ向かいました。



状況2

AKB48が秋葉原でイベントをしています。イベントが終わったら、秋葉原からパレードで東京駅まで歩いて来ました。



教師：このような状況で、グラフからわかることを挙げよう。
 りえ：ここが到着だから、秋葉原まで3.5kmかな?

たて：滞在時間は?

りえ：この止まっているところだよ。式にできた?

だい：式にするには、どうすればいいんだろう。

$$y = \frac{1}{10}x - 0$$

〇のところは定数だから、本物の式はある。右下がりがないので、効率よく移動ができた。何分で到着するか。

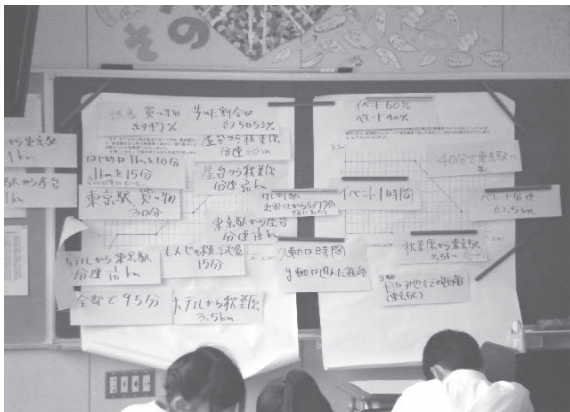
$$\boxed{1\text{回目}} \quad y = \frac{1}{10}x, \quad \boxed{2\text{回目}} \quad y = \frac{1}{15}x, \quad \boxed{3\text{回目}} \quad y = \frac{3}{50}x$$

だいは、最初から式を出そうしているが、定数(切片)の部分がなかなか出せない。しかし、速さは3つの部分全て求め、それを傾きとして表している。

教師：では、グラフからわかることを各班で一つずつ出して下さい。

状況1、状況2それぞれについて、グラフからわかることを挙げた。速さ、距離、滞在時間、出会った時間、割合、x軸y軸の意味などが挙げられた。それらを付箋にしてグラフ用紙にまとめた。

<グラフからわかること>



③芸能人と班別行動をしている皆さんが会うような問題をつくろう。(第14～15時)

教師：今日は前の時間と同じ状況で、みなさんとAKB48が会うような問題をつくってもらいます。出発時間は自由で、11時までに集合すればよいものとします。買い物は20～40分、試食は10～20分とします。会うような問題であれば何を求めてもかまいません。

だいは始めに、班別行動をしている動きをグラフ電卓での④のように表した。

りえ：そのグラフ簡単じゃない？

りえは買い物をしている時に、いったん進んで戻る動きを取り入れ、その動きをだいに説明する。するとだいは感心するようになる。

りえ：出会うところは、AKBがイベントをしているときでもいいですか？

教師：どこでもいいけど、お互いが動いて出会うところの方がいいかな。

りえは2本のグラフを合わせてみて、試食中になってしまうから出会わないと判断し、うまく会うように買い物の時間を短くしている。だいも同じよ

うに2本のグラフを合わせている。りえはAKBのパレードの動きを式に表そうして、切片とは何か疑問を持つようになる。そして、ワークを参考にしながら切片はy軸との交点ということを学ぶ。そして、りえは以下のような式を作った。

AKB：

$$y = -\frac{3}{50}x + 3.5$$

班別行動：

$$y = \frac{3}{5}x + \bigcirc$$

(切片はまだ不明)

りえ：整数で出ない。

だい：yは決まっていなくてもいいときがある。

りえ：傾きは違うかな。

りえは、班別行動をしている動きの式を出すために、傾きと1点の座標(100,35)の値を代入した。そして、以下のように正しい式を求めることができた。携帯電話の料金プランを考える際の式の求め方が生きている。

班別行動：

$$y = -\frac{3}{50}x - 2.5$$

りえ：xの値だから時間を求めている。どこで出会えたかにしたいからyを求めないといけない。求めたxの値を式に代入しないといけない。

りえは、交点の座標の意味にも気付いている。そして、以下の問題を作成した。

りえの作成した問題

AKB48とみんなが出会ったところは、ホテルから何kmの地点か。

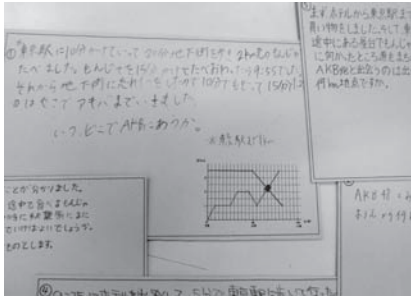
④作成した問題を仲間分けし、仲間分けされた問題を効率よく解こう。(第16～21時)

前時までで問題の作成を終えた。そこで、多くの問題を整理し、効率よく問題を解いていくために、本時では問題の仲間分けを行った。

教師：みなさんが作った問題から、先生が10問選びました。各班1問は残しています。そこで、この10問がどのような問題かを考えて、問題の仲間分けをして画用紙にまとめて下さい。

2班では、だい、しんの男子2名と、りえ、あや、ももの女子3名が全く別々に話し合いを進める。

〈作成した問題のカード〉



女子3名

- りえ：図で分けたら？
 あや：図？これないよ。
 もも：最終的に何を求めるかで分けるんじゃない？距離か速さか時間か。
 りえ：5番はいろいろ。6番は「何をしているときに」だから特別。
 もも：「いろいろ」が多いな。
 りえ：「いろいろ」をどこに分けようかな。あ、わかった。真ん中に置けばいい。
 あや：3つ求めるんだ。1回並べよう。
 りえ：こっちがいつどこで・・・だから何に入るのかな。

女子の方は、「何を求めるか」で分けていく。そして「いろいろ」含まれるものについては図で解決することになった。しかし、「どこに」「何をしているときに」「いつ」というような表現の問題をどう扱うか、文章表現に忠実なために迷いが生じている。

男子2名

- だい：連立方程式で解ける問題かじゃない。
 しん：全然わからん。何がわからんかもわからん。
 だい：仲間分けやってみる？連立方程式を使うやつとそれ以外のと。言ってる意味わかる？
 しん：わからん。
 だい：連立方程式って2つのグラフの交点が変わっているやつ。会ったか、グラフが公差してその交点を求めるから・・・。
 しん：5番と1番は一緒？
 だい：そう。
 しん：わかってきた。
 だい：2番は1番と同じってわかった？交点を求めると・・・。

だいとしんはそれぞれ問題を解いていく。問題の意味を理解するにはまず問題を解くことが大事だと思っっているようす。だいはしんという対話の相手がいることで、仲間分けの思考を明確にすることが可能となり、しんは問題やグラフの意味を理解することが可能になっている。対話の中でお互いに学んでいる。

女子たちは画用紙に貼り始めるが、「画用紙をもう一枚もらってきたら？」と男子に勧める。男子の活動も尊重しているようす。一方だいは、「ふつう答えを求めるもので仲間分けするのかな？」と女子の分け方に見聞きしている。そして自分の考えにも

自信を持ちきれずにいたようだ。それを周りに後押しされて画用紙をもらいにいく。一見すると男女が別々に活動しているようでありながら、実際にはお互いに尊重し合い、支え合っているようだ。

教師：それでは時間になりましたので、今日は1班に発表してもらいます。

ゆみ：まず着く時間で分けました。次に、何を求めるのか、何をしているのかを調べました。時間、速さ、距離、時間と距離、速さと時間、割合と座標。それからAKBと一緒に歩く、グラフの形として戻っているものと戻っていないものです。

1班は多様な視点で分けられていた。他の班でも1班とは違う視点が出ていた。それらは次時におさえることにし、全部で以下の9つの視点があることを確認した。

仲間分けの視点

- ①求めるもの（速さ、距離、時間、割合、座標）
- ②グラフの形（戻る、戻らない）
- ③つく時間（ x のとり値、 x 座標）
- ④AKBと一緒に歩く
- ⑤グラフをずらして解く
- ⑥求める方法（図、算数的）
- ⑦何をしているか問題
- ⑧範囲を求める、可能・不可能
- ⑨原点からスタートしていない

その後、各班が考えた仲間分けの視点を参考にし、問題を解いていった。問題を解く過程で、仲間分けの視点の転換や問題の表現の改善を行った。さらに、グラフから読み取れるものはグラフから簡単に答えを求めた。式を用いて正確に答えを出す問題は、複雑な計算も行いながらそれぞれの問題を解いていった。だいやりえは、式を自由に駆使して問題を解いていた。

さらに、②の視点から一次関数の傾き、③や⑧の視点から変域、⑤の視点からグラフの平行移動、⑨の視点から一次関数のグラフについて確認し、一次の概念形成をはかってこの単元を終えた。

3 省察

(1) コミュニティを通した学び

本単元は2年生初期の学習であった。最初に、1年生からの学び合うコミュニティの形成がどのくらいできているかを把握するために、等式の作成から探究を始めた。すると子どもたちは抵抗なく、スムーズに探究しているようすであったので、1年生の時の経験が生きているようだった。

さらに、本格的に携帯電話の料金に関する探究に入ると、コミュニティが生きてくる場面が見られた。それは、だいの言動から明らかになった。だいは携帯電話の料金を考える際に、最初は算数的に計算中心の解法でしか考えることができなかった。さらに、だいを中心にした2班全員のメンバーもそうであった。しかし、中間発表において、3つの班の代表的な解法に関する発表を聞き、方程式やグラフを駆使した解法を思いつくことができた。班同士の学び合うコミュニティが生まれた瞬間であった。

また、第16時の作成した問題を仲間分けする場面でも見られた。2班では、だい、しんの男子2名と、りえ、あや、ももの女子3名が全く別々に話し合いを進めていた。そこでは、だいとしんの対話によってお互いが学びを深めていた。さらに一見お互いが全く別のことをしているようであるが、女子は男子の活動を尊重し、だいの女子の意見を理解していた。実際にはお互いに尊重し合い、学び合っている場面が見られた。

班同士、または班内のメンバー同士での意見交換が、個々の学びを高めることにつながったのである。

(2) 式やグラフの有用性

本単位では、式やグラフの有用性を実感させることを一つのねらいとして探究を進めた。

だいのようすから、「携帯電話の料金」については、初めは算数的な見方しかできていなかったが、他の発表を聞いてグラフや方程式を用いることができるようになった。さらに、「修学旅行の移動のようす」では、どの探究においてもまずは式を出すことを心掛けていた。式を問題解決の一つの道具として使いこなすことが可能になっていた。

作成した問題を解き合う場面では、おおまかな数値や答えを出す際はグラフを用いて、正確な数値を出す際は式を用いていた。グラフから式、式からグラフの考えの移行ができているようにも感じた。

単元終了後のだいの感想を見ると、本単元実践前は式よりもグラフを使うことが問題解決に便利だと感じていたが、実践後はグラフより式が便利だと実感しているようであった。だいの他にも子ども全体として、そのような傾向が表れていた。本単元の実践は、式の有用性が実感できるものとなったように感じる。

(3) 3年間の子どもの学びを省察する

数学教育の一つの課題は、抽象的な概念の獲得に困難を感じていることだと言われている。特に中学校3年間において、抽象的な概念の獲得の困難は一層目立っているようだ。

そこで具体から抽象的な概念の獲得をめざすために、「修学旅行の移動のようす」において、まずグラフ電卓を用いた。五つの動きをグラフを用いて調べることにより、次の学習における修学旅行の移動のようすを考える際に、スムーズにつなげることができた。

グラフからわかることを挙げ、問題を作成・仲間分けし、それを解き合う過程は、PISAの数学化サイクルを意識した。つまり、現実の場面(修学旅行の移動)を数学の世界で考え、数学的アプローチ(立式、連立方程式の解き方)によって数学的な解(連立方程式の解)を現実のものとしてとらえることを目指した。

問題を解き合う場面では、どの子どもも式を用いて解決しているようすから考えると、数学的に式を用いた解法が意識できたように感じる。PISAの調査によると定式化の過程ができていないという報告がある。本単元はPISAの求める数学的リテラシーを育む一つのきっかけになったようにも感じる。

(4) 省察を捉え直し、次なる学びに生かす

省察とは、子どもたちが学ぶ過程で学習活動の振り返りを行い、さらに質の高い学びになるためのものを見出していく行為であると考えられる。

携帯電話の料金プランについて考えた際に、中間発表会を行ったことで、だいの疑問が解消された。中間発表を通して、今までの学びを振り返り、疑問点が解消され、次の学びへとつながったのである。

また、単元「一次関数」「連立方程式」の終了後に、レポートとして「身のまわりにある関数について調べよう」という課題を提示した。学んだことを振り返り、それを生かして自分の言葉でレポートにまとめる。このような行為が、既習事項を用いた学びとなり、新たな関数を発見させ、次の学びの発意へつなげることを可能にさせるのであろう。

(草桶 勇人)

参 考 文 献

多面的にものを見る力・論理的に考える力を育てる数学の授業 東洋館出版社 2004.
世界をひらく数学的リテラシー 明石書店 2006.